数理解析研究所講究録
264巻 1976年 208-211

On $u_t(x,t)-\Delta u(x,t)+f(u(x,t-r),u(x,t))=0$

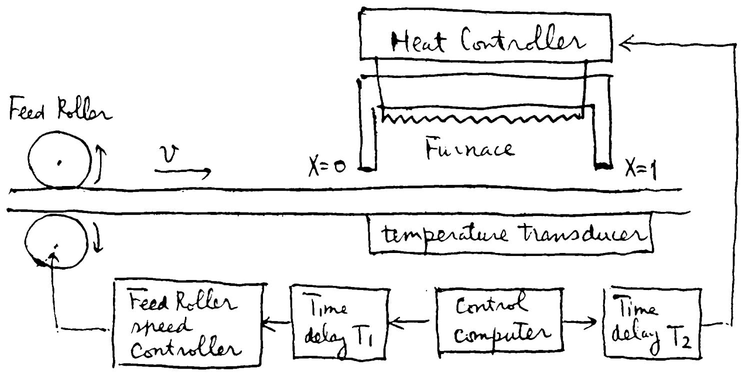
広大理　井上　淳

§1. 問題と結果　まず，これは広大理学部の吉田清，宮川鉄朗氏との共同研究であることをお断りしたい。

問題　Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とし，次の初期境界値問題を考える。

$$
(1.1)\quad \begin{cases} u_t(x,t)-\Delta u(x,t)+f(u(x,t-r),u(x,t))=0 & \text{in } Q=\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0 & \\ u(x,t)=\varphi(x,t) & \text{for } -r\leqq t\leqq 0 \end{cases}
$$

問題の由来　(a) P.K.C. Wang [4] によると，遅れを伴なう自動制御付熔鉱炉の温度 $u(x,t)$ は次式を満たす。



An automatically controlled furnace with time delays

$$(1.2)\quad u_t(x,t)=k\,u_{xx}(x,t)+v\big(g(u(x,t-T_1))\big)u_x(x,t)+c\big(f(u(x,t-T_2))-u(x,t)\big)$$
$$0<x<1$$

ここで，vは 時間遅れT_1をもつ温度分布 $u(x,t-T_1)$ の空間平均によって決まるベルトコンベアーの速度，f, c ともに既知関数（装置によって決まってくる）

(b) C. C. Travis - G. F. Webb [2] は以下の方程式を考え，J. Hale が ordinary functional differential equations に対して行なった考察を，その場合について行なった。

$$(1.3)\quad \begin{cases} u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(t,u(x,t-r)) & 0\le x\le\pi,\ t\ge 0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t\ge 0 \\ u(x,t)=\varphi(x,t) & 0\le x\le\pi,\ -r\le t\le 0 \end{cases}$$

Wang [3] [4] の場合も，Travis-Webb [2] の場合も，考えている非線型項は Lipschitz 連続．我々は以下で非線型項が locally Lipschitz 連続 の場合を考える．

Ωを$\mathbb{R}^3$の有界領域で境界$\partial\Omega$は滑めらかとする．('有界'の仮定は本質的でない)．(1.1) の非線型項 $f(a,b)$ は (I) a^3, (II) a^2b, (III) ab^2 とする．$\mathbb{R}^3$で3次の非線型項を考えるのは $H_0^1\subset L^6$ なる Sobolev の埋蔵定理を使う為である．$\mathbb{R}^n$で一般的な非線型項を考えるには，たとえば I. E. Segal [1] の方法を用いるのがよいと思われるが，ここでは
ふれない．

以下，(I) の場合に限って，得られている結果を述べよう．

A を $D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，$Au=-\Delta u$ for $u\in D(A)$ で定義し，

(1.1) を

$$(1.4)\qquad \begin{cases} u(t)=e^{-tA}\varphi(0)-\int_0^t e^{-(t-s)A}f(u(x,s-r),u(x,s))ds \\ u(t)=\varphi(t) \qquad\qquad -r\leqq t\leqq 0 \end{cases}$$

と変形し，$f(u(x,s-r),u(x,s))=u(x,s-r)^3$ の場合について述べる．

<u>定理 1</u>　任意の $\varphi\in C([-r,0];H_0^1(\Omega))$ に対し，(1.4) を満たす一意的な解 $u\in C([-r,\infty):H_0^1(\Omega))$ が存在する．

<u>定理 2</u>　$\varphi\in C([-r,0];H_0^1(\Omega))$ が $\varphi(0)\in D(A)$，$\varphi_t\in C([-r,0]:H_0^1(\Omega))$ 及び $\varphi_t(0)=-A\varphi(0)-\varphi^3(-r)$ を満たすとき，上で求められた解 u は $C([0,\infty):H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ に属し，かつ $u_t\in C([-r,\infty);H_0^1(\Omega))$．

次に T を固定し $r_N=\frac{T}{N}$ とおく．N を $r_N<r$ なるよう十分大きくとる．u_N を次式の解とする

$$(1.5)_N\qquad \begin{cases} u(t)=e^{-tA}\varphi(0)-\int_0^t e^{-(t-s)A}u^3(s-r_N)ds \qquad t>0 \\ u(t)=\varphi_N(t) \qquad\qquad -r_N\leqq t\leqq 0 \end{cases}$$

但し $\varphi_N(t)=\varphi(t)$ の $-r_N\leqq t\leqq 0$ への制限．この u_N が $r_N\to 0$ のとき

$$(1.6)\qquad u(t)=e^{-tA}\varphi(0)-\int_0^t e^{-(t-s)A}u^3(s)ds$$

の解 u に収束するかどうか考える

定理3　初期関数 $\varphi(t)$ が十分小さいとする．このとき $\{u_N\}$ は (1.6) の解 u に $L^2(Q)$ の中で収束する．

更に，我々は (1.4) の解 u につき 次のことを示せる

定理4　初期関数 $\varphi(t)$ が十分小さいとする．このとき 初期関数 φ による定数 k_1' (t には無関係) があって

$$(1+t^2)^{\frac{1}{4}} \| u(t) \|_{H^1(\Omega)} \leq k_1'$$

が成りたつ．

§2. 結果の証明 及び，より詳しい結果については 筆者の論文：Some properties of solutions for semi-linear heat equations with time-lag　preprint (投稿中) を参照されたい．

参考論文

[1] I. E. Segal : Dispersion for non-linear relativistic equations II. Ann. Ecol Norm. Sup. 1 ('68) 459-497

[2] C. C. Travis - G. F. Webb : Existence and stability for partial functional differential equations. Trans A. M. S. 200 ('74) 395-418

[3] P. K. C. Wang . Optimal control of parabolic systems with boundary conditions involving time delays . SIAM J. Control 13 ('75) 274-293

[4] ——— : Asymptotic stability of a diffusion system with time-delays J. Appl. Mech. Ser. E 30 ('63) 500-504